

Zeitschrift für Instrumentenkunde

Kuratorium:

Prof. Dr. M. Berek in Wetzlar, Staatsrat Prof. Dr. A. Esau in Berlin-Charlottenburg, Prof. Dr. G. Joos in Jena, Prof. Dr. Dr.-Ing. e. h. E. Kohlschütter † in Potsdam, Vorsitzender, Prof. Dr. F. Weldert in Berlin-Halensee, geschäftsführendes Mitglied

Redaktion: Oberregierungsrat Dr. W. Keil in Berlin-Südende

63. Jahrgang

September 1943

Neuntes Heft

Zum physiologischen Grundgesetz der Wahrnehmung von Lichtreizen.

Mit 5 Textabbildungen.

Von

M. Berek in Wetzlar.

Durch zahlreiche Messungen von Lichtreizen auf ausgedehnteren Umfeldern veränderlicher Helligkeit ist in den letzten Jahren ein umfangreiches, wenn auch zum Teil heterogenes Beobachtungsmaterial geschaffen worden, das die Frage nach einem umfassenden physiologischen Grundgesetz für die Wahrnehmung solcher Reize immer stärker in den Vordergrund rückt. Die Bedürfnisse der angewandten Optik liegen in gleicher Richtung. Bis heute kennen wir nur eine Reihe von Regeln mit beschränktem Anwendungsbereich (den Riccoschen Satz, die Pipersche Regel, die sogenannte Ricco-Pipersche Formel, das Weber-Fechnersche Gesetz, das Schschärfengesetz). Im folgenden werden alle diese Sonderregeln aus einem umfassenden Gesetz hergeleitet. Als Grundlage habe ich folgendes Beobachtungsmaterial benutzt:

1. Messungen von R. G. Weigel und O. H. Knoll¹. Sie betreffen nur das Nachtsehen, von lichtlosem Umfeld bis zu Umfeldleuchtdichten von 10^{-6} Stilb; sie erstrecken sich aber über einen sehr großen Schwinkebereich, von $1/6'$ bis $1500'$. Die Beobachtungsergebnisse sind übersichtlich und sorgfältig graphisch dargestellt, so daß eine Wiedergewinnung der Meßwerte durch Ausmessung der Diagramme nicht auf Schwierigkeiten stößt.

2. Messungen von H. Siedentopf². Sie betreffen Umfeldleuchtdichten von $10^{-7,1}$ bis $10^{-1,1}$ Stilb im Schwinkebereich von $1'$ bis $200'$. Die Ergebnisse sind in Tabellenform dargeboten.

3. Messungen von B. Schönwald³. Sie erstrecken sich über Umfeldleuchtdichten von $10^{-6,5}$ bis $10^{-0,5}$ Stilb, betreffen aber nur sehr kleine Schwinke, bis maximal $1'$. Die Beobachtungsergebnisse müssen aus Diagrammen ausgemessen werden, was näherungsweise möglich ist.

4. Messungen von W. Arndt⁴. Sie betreffen Umfeldleuchtdichten von 10^{-9} bis $10^{-0,5}$ Stilb, jedoch nur für einen Schwinke von $60'$. Auch hier ist eine näherungsweise Entnahme der Beobachtungswerte durch Ausmessung der graphischen Darstellung möglich.

¹ R. G. Weigel und O. H. Knoll, *Das Licht* 10. S. 179. 1940; insbesondere Abb. 5. In dieser Abbildung sind die Anschriften „ 10^{-6} “ und „ 10^{-8} “ Stilb offenbar versehentlich vertauscht.

² H. Siedentopf, *Astron. Nachr.* 271. S. 193. 1941.

³ B. Schönwald, *Das Licht* 11. S. 15. 1941; Abb. 1 u. 2.

⁴ W. Arndt, *Das Licht* 7. S. 101. 1937; Abb. 2.

5. Messungen von R. O. Schumacher¹. Sie erstrecken sich über Umfeldleuchtdichten von $10^{-3,5}$ bis $10^{-0,2}$ Stilb, betreffen aber ebenfalls nur den Sehwinkel von rund 1° . Die Ergebnisse sind tabellarisch und graphisch gut dargestellt.

Alle diese Beobachtungen betreffen nur den Fall, in dem die Infeldleuchtdichte B_i größer ist als die Umfeldleuchtdichte B_u . Ich habe die Ergebnisse der verschiedenen Autoren nicht gemittelt, weil hierbei die Gefahr bestanden hätte, gutes Beobachtungsmaterial durch Vermischung mit weniger gutem zu verschlechtern. Aus diesem Grunde habe ich auch bei den von H. Siedentopf mitgeteilten Messungen die von den beiden Beobachtern M. und W. erzielten Beobachtungen getrennt behandelt.

Entwicklung des Grundgesetzes. Bei der Aufstellung des Gesetzes kann man im wesentlichen von drei verschiedenen Beobachtungsgrößen ausgehen, von der Infeldleuchtdichte B_i , der relativen Leuchtdichte $B_i - B_u$ oder dem Kontrast $\frac{B_i - B_u}{B_u}$. Für sehr kleine Sehwinkel ist der Gang von B_i und $B_i - B_u$ mit dem Sehwinkel derselbe. Eine Differenzierung tritt erst im Bereiche mittlerer und größerer Sehwinkel ein; dort besitzt dann $B_i - B_u$ eine weit mehr ausgesprochene Abhängigkeit vom Sehwinkel als B_i . Da es sich empfiehlt, das Beobachtungsmaterial nach der Umfeldleuchtdichte B_u zu ordnen, ist bei konstanter Umfeldleuchtdichte die Abhängigkeit der Größen $B_i - B_u$ und $\frac{B_i - B_u}{B_u}$ vom Sehwinkel bis auf einen Proportionalitätsfaktor dieselbe. Wir gehen somit am besten von der relativen Leuchtdichte $B_i - B_u$ aus.

In Grenzfällen bestehen zwischen $B_i - B_u$ und dem Sehwinkel σ ganz einfache Zusammenhänge: Wie unmittelbar aus den Darstellungen bei R. G. Weigel und O. H. Knoll, l. c., ersichtlich, ist für sehr kleine Sehwinkel σ der Zusammenhang zwischen $\log(B_i - B_u)$ und $\log \sigma$ linear, und für sehr große σ nähert sich $B_i - B_u$ einem Grenzwert. Es gilt also

$$\left. \begin{aligned} \log(B_i - B_u)_{\sigma \rightarrow 0} &= x + z \log \sigma, \\ B_i - B_u_{\sigma \rightarrow \infty} &= B, \end{aligned} \right\} \quad 1)$$

wo x , z und B , solange die Umfeldleuchtdichte B_u festgehalten wird, ebenfalls konstant sind. Statt 1) kann man schreiben:

$$\left. \begin{aligned} B_i - B_u_{\sigma \rightarrow 0} &= \Phi(B_u) \cdot \sigma^z(B_u), \\ B_i - B_u_{\sigma \rightarrow \infty} &= B(B_u), \end{aligned} \right\} \quad 2)$$

wo nunmehr ausführlich durch Hinzufügung des Argumentes B_u angedeutet ist, daß Φ , z und B Funktionen der Umfeldleuchtdichte B_u sind. Wir lassen aber im folgenden der Kürze halber immer bei den Funktionen Φ , z und B das Argument B_u fort.

Es werde nun versuchsweise angenommen, daß sich die allgemeine Abhängigkeit der Größe $B_i - B_u$ vom Sehwinkel durch Überlagerung der beiden Grenzfälle darstellen läßt. Dieses Zusammenwirken kann einfach additiv oder sich gegenseitig beeinflussend erfolgen. Im ersteren Falle wäre zu schreiben

$$B_i - B_u = \Phi \sigma^z + B, \quad 3)$$

im zweiten Falle

$$B_i - B_u = (\sqrt{\Phi \sigma^z} + \sqrt{B})^2. \quad 4)$$

Nach dem weiter unten noch näher zu besprechenden Verfahren wurde der mittlere Fehler berechnet, der sich für die einzelnen Messungen je bei Anwendung des Gesetzes 3)

¹ R. O. Schumacher, Die Unterschiedsempfindlichkeit des helladaptierten menschlichen Auges. Diss. Berlin 1939. 31 Seiten, Tab. II und Abb. 10. — *Das Licht* 11. S. 134. 1941. Abb. 3.

und 4) ergibt. Man erhält z. B. aus dem Beobachtungsmaterial von R. G. Weigel und O. H. Knoll bei 10^{-8} Stilb als mittleren Fehler m einer Messung von $\log(B_i - B_u)$

$$\text{bei Anwendung von Formel 3): } m = \pm 0,099,$$

$$\text{bei Anwendung von Formel 4): } m = \pm 0,052.$$

Gegenüber Formel 3) zeigen also dieselben Messungen einen nahezu doppelt so großen mittleren Fehler als gegenüber Formel 4), d. h. das Gesetz 4) paßt sich den Messungen nahezu 4-mal besser an als die Formel 3). Genau so wie in diesem Beispiel liegen die Verhältnisse bei anderen Umfeldleuchtdichten. Daher muß die Beziehung 3) als weniger zutreffend von vornherein ausscheiden. Ob andererseits das Gesetz 4) zur Darstellung der Messungen ausreicht, ist danach zu entscheiden, ob durch dieses Gesetz die Genauigkeit des Beobachtungsmaterials wirklich ausgeschöpft wird. Dies wurde mit Hilfe der Gaußschen Methode geprüft¹. Um dabei die komplizierende Berücksichtigung der Gewichte der einzelnen Messungen zu vermeiden, die für die relative Leuchtdichte $B_i - B_u$ stark mit B_u und σ variieren, wurde das Gaußsche Verfahren auf die Größe $u = \log(B_i - B_u)$ angewandt, weil für diese die Fehler bei allen Umfeldleuchtdichten und Schwinkeln praktisch gleich groß sind. Man erhält mit 4), wenn M den Modul des Briggschen Logarithmensystems (0,43429...) bedeutet:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\partial u}{\partial \sqrt{\Phi}} = \frac{2\sqrt{\sigma^2 M}}{\sqrt{\Phi \sigma^2 + \sqrt{B}}} \\ b &= \frac{\partial u}{\partial \sqrt{B}} = \frac{2M}{\sqrt{\Phi \sigma^2 + \sqrt{B}}} \\ c &= \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{2\sqrt{\Phi} M}{\sqrt{\Phi \sigma^2 + \sqrt{B}}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2} \frac{\log \sigma}{M} = \frac{\log \sigma \sqrt{\Phi \sigma^2}}{\sqrt{\Phi \sigma^2 + \sqrt{B}}} \\ l &= \Delta u = \log(B_i - B_u) - 2 \log(\sqrt{\Phi \sigma^2 + \sqrt{B}}). \end{aligned} \right\} 5)$$

Setzt man in diese Beziehungen für Φ , B und z Näherungswerte ein, so kann man aus den Differentialquotienten a , b , c und dem „Fehler“ l die (im obigen Falle 10) Koeffizienten der Gaußschen Fehlergleichungen berechnen, deren Auflösung sowohl die wahrscheinlichsten Werte für Φ , B , z sowie deren mittlere Fehler und den mittleren Fehler m der jeweiligen Messung von $\log(B_i - B_u)$ liefert. Bei dieser (ersten) Durchführung der Rechnung ergab sich nun, daß z für alle Umfeldleuchtdichten nur wenig um den Wert -2 schwankt. Man erhält z. B. aus den Messungen von R. G. Weigel und O. H. Knoll

$$\text{bei } 10^{-8} \text{ Stilb: } z = -2,006 \pm 0,022,$$

aus den Untersuchungen von H. Siedentopf, entsprechend den beiden Beobachtern M. und W.:

$$\text{bei } 10^{-6,6} \text{ Stilb: } \begin{cases} \text{M.: } z = -1,880 \pm 0,034 \\ \text{W.: } z = -2,026 \pm 0,022, \end{cases}$$

$$\text{bei } 10^{-2,6} \text{ Stilb: } \begin{cases} \text{M.: } z = -1,970 \pm 0,036 \\ \text{W.: } z = -1,852 \pm 0,041. \end{cases}$$

Die aus den Messungen der erstgenannten Autoren für andere Umfeldleuchtdichten abgeleiteten Werte z verhalten sich genau wie in dem angegebenen Beispiel: Stets beträgt die Abweichung der Größe z von dem Wert -2 nur einen Bruchteil des mittleren Fehlers. Für die aus den Untersuchungen der anderen Autoren berechneten Daten von z steigt die Abweichung gegen den Wert -2 gelegentlich bis zu dem Mehrfachen des

¹ Siehe z. B. F. Kohlrausch, Praktische Physik, 17. Aufl., Leipzig u. Berlin 1935. S. 26 u. f.

mittleren Fehlers an. Hieraus ist aber nicht zu schließen, daß diese Abweichungen reell sind. Man ersieht schon aus den obigen Beispielen, daß bei derselben Umfeldleuchtdichte die Abweichung, aus den Messungen des einen Beobachters berechnet, positiv, aus denen des anderen berechnet, negativ ausfällt. Dieses Beobachtungsmaterial hat nämlich, wie wir später noch näher sehen werden, nicht diejenige reelle Genauigkeit, die dem berechneten mittleren Fehler entsprechen würde. Es hat dies wahrscheinlich seinen Grund in dem von H. Siedentopf bei seinen Messungen benutzten Einstellkriterium, das offenbar das Zustandekommen einseitiger Messungen begünstigt, so daß die Fehlerrechnung eine scheinbar höhere Genauigkeit, als wirklich vorhanden, ergibt.

Es unterliegt wohl keiner Willkür, der Größe z den Wert -2 zuzuordnen, wie es übrigens auch das Riccosche Gesetz verlangt. Damit vereinfachen sich die Beziehungen 4) und 5) zu

$$B_i - B_u = \frac{(\sqrt{\Phi} + \sigma\sqrt{B})^2}{\sigma^2}; \tag{4a}$$

$$a = \frac{2M}{\sqrt{\Phi} + \sigma\sqrt{B}}, \quad b = \frac{2M\sigma}{\sqrt{\Phi} + \sigma\sqrt{B}}, \tag{5a}$$

$$l = \log(B_i - B_u) + 2 \log \sigma - 2 \log(\sqrt{\Phi} + \sigma\sqrt{B}).$$

Aus 4a) ist nunmehr erkennbar, daß Φ die Dimension eines Lichtstromes, B die Dimension einer Leuchtdichte hat, weshalb wir Φ als die für das Grundgesetz charakteristische Lichtstromfunktion und B als die charakteristische Leuchtdichtefunktion bezeichnen wollen. Da nunmehr nur diese zwei Unbekannten auftreten, reduzieren sich die Koeffizienten der Gaußschen Fehlergleichungen auf 6. Es erwies sich als zweckmäßig, auch die Auflösung dieser vereinfachten Fehlergleichungen durchzuführen, da man so namentlich in den Fällen, in denen sich bei der ersten Rechnung für z gegen -2 stärker abweichende Werte ergaben, nunmehr auch merklich andere und offenbar wahrscheinlichere Werte für die gesuchten Bestimmungsgrößen $\sqrt{\Phi}$ und \sqrt{B} erhält. Die auf solche Weise berechneten Daten dieser Funktionen, vielmehr, aus Gründen bequemerer Schreibweise und im Hinblick auf die graphischen Darstellungen, deren Logarithmen, sind in Abhängigkeit von der Umfeldleuchtdichte samt den zugehörigen mittleren Fehlern und dem mittleren Fehler der Meßgröße $\log(B_i - B_u)$ in Tab. I entsprechend den verschiedenen Quellen des Beobachtungsmaterials zusammengestellt. Da die Messungen von B. Schönwald nur so kleine Schwinkel betreffen, daß aus ihnen allein eine gleichzeitige Berechnung beider Funktionen nicht möglich ist, so habe ich diese Messungen einmal mit den Messungen von W. Arndt, das andere Mal mit den Messungen von R. O. Schumacher kombiniert, deren Messungen, einzeln genommen, ebenfalls nicht verwendbar wären. Hinsichtlich der Funktion $\sqrt{\Phi}$ ergaben beide Kombinationen fast identische Werte. Die Unterschiede sind so geringfügig, daß von einer gesonderten Berücksichtigung in der Tabelle abgesehen werden konnte. Dagegen, sind die Ergebnisse für die Funktion \sqrt{B} aus den beiden Kombinationen erheblich unterschiedlich. Die Angabe des mittleren Fehlers mußte hier wegen der unzureichenden Anzahl der Beobachtungen unterbleiben.

Falls die Beziehung 4a) wirklich den Inhalt der Messungen erschöpfend darstellt, also als allgemeines Wahrnehmungsgesetz angesprochen werden kann, muß der nach der Gaußschen Methode unter Zugrundelegung der Formel 4a) berechnete Fehler m einer Messung von $\log(B_i - B_u)$ in der Größenordnung übereinstimmen mit der mittleren Abweichung, die in einer graphischen Darstellung die Meßpunkte gegen eine ausgleichende Kurve aufweisen. R. G. Weigel und O. H. Knoll haben in ihrer Darstellung solche ausgleichenden Kurven für die vier von ihnen benutzten Umfeldleuchtdichten gezeichnet.

Tabelle 1.

Lichtstromfunktion Φ } des Grundgesetzes 4a), berechnet aus den Beobachtungen verschiedener
Leuchtdichtefunktion B } Autoren (Leuchtdichte in Stillb, Schwinkel in Minuten).

$m_{\log(B_t - B_u)}$: mittlere Abweichung der Beobachtungen gegen das Grundgesetz.

$\log B_u$	$m_{\log(B_t - B_u)}$	$\log\sqrt{\Phi}$	$\log\sqrt{B}$	Berechnet aus Messungen der Autoren
lichtlos	$\pm 0,055$	$-2,710 \pm 0,007$	$-5,062 \pm 0,015$	R. G. Weigel und O. H. Knoll
-8	52	-2,429 8	-4,521 12	
-7	47	-2,230 7	-4,125 10	
-6	48	-2,090 8	-3,721 9	
-7,1	$\pm 0,008$	$-2,184 \pm 0,004$	$-4,048 \pm 0,005$	H. Siedentopf, Beobachter M.
-6,6	44	-2,248 12	-3,729 15	
-6,1	41	-2,194 12	-3,587 14	
-5,6	22	-2,190 7	-3,430 7	
-5,1	53	-2,152 18	-3,277 18	
-4,6	23	-2,022 8	-3,152 7	
-4,1	35	-1,910 12	-3,046 11	
-3,6	17	-1,760 6	-2,814 5	
-3,1	22	-1,622 8	-2,655 7	
-2,6	17	-1,481 7	-2,406 5	
-2,1	26	-1,306 11	-2,182 7	
-1,6	60	-1,199 21	-1,944 16	
-1,1	33	-1,100 18	-1,694 9	
-7,1	$\pm 0,034$	$-2,268 \pm 0,017$	$-4,121 \pm 0,020$	H. Siedentopf, Beobachter W.
-6,6	18	-2,158 5	-3,879 10	
-6,1	57	-2,118 15	-3,611 20	
-5,6	41	-1,956 11	-3,434 16	
-5,1	34	-1,962 10	-3,333 12	
-4,6	25	-1,888 8	-3,146 9	
-4,1	41	-1,848 15	-2,995 14	
-3,6	44	-1,718 16	-2,760 13	
-3,1	33	-1,580 13	-2,581 10	
-2,6	35	-1,456 14	-2,310 10	
-2,1	46	-1,346 21	-2,094 13	
-1,6	29	-1,102 12	-1,877 7	
-1,1	33	-0,910 13	-1,660 9	
-6,5	$\pm 0,058$	$-2,089 \pm 0,011$	-3,430	B. Schönwald und W. Arndt bzw. R. O. Schumacher
-6	52	-2,046 10	-3,328	
-5,5	77	-2,029 13	-3,206	
-5	63	-1,963 12	-3,099	
-4,5	48	-1,900 10	-2,960	
-4	55	-1,801 11	-2,777	
-3,5	31	-1,686 7	-2,583 -2,777	
-3	35	-1,518 8	-2,379 -2,541	
-2,5	31	-1,336 7	-2,167 -2,296	
-2	53	-1,155 10	-1,936 -2,036	
-1,5	8	-0,911 1	-1,701 -1,777	
-1	63	-0,701 13	-1,414 -1,504	

Aus ihnen ist ersichtlich, daß die größten, nur vereinzelt vorkommenden Abweichungen der Meßwerte gegen die ausgleichenden Kurven, in $\log(B_t - B_u)$ ausgedrückt, etwa $\pm 0,10$ bis $\pm 0,12$ betragen, und daß im Durchschnitt die Abweichungen etwa um $\pm 0,05$ liegen mögen. Wir ersehen nun aus Tab. 1, daß mit dieser letzteren Genauigkeit sich das Gesetz 4a) den Messungen von R. G. Weigel und O. H. Knoll anschließt, und zwar in sehr guter Einheitlichkeit für alle Umfeldleuchtdichten, ein Beweis für die Güte und

Gleichmäßigkeit dieser Messungen. Dasselbe Gesetz, nach dem Gaußschen Verfahren auf die Messungen von H. Siedentopf angewandt, zeigt, nach den Fehlergrößen m beurteilt, größtenteils eine noch engere Anpassung an das Beobachtungsmaterial. Hieraus

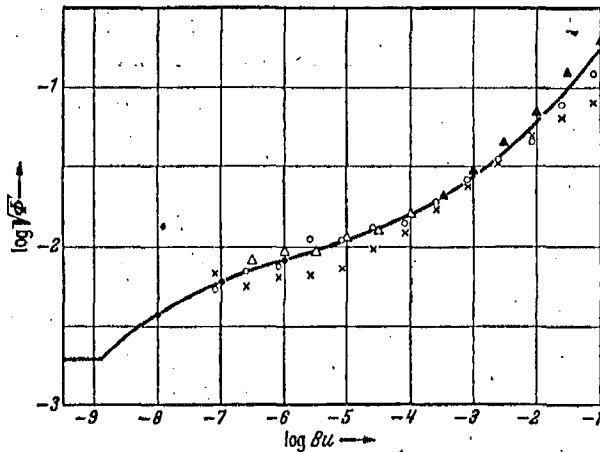


Abb. 1. Die Lichtstromfunktion Φ , berechnet aus Messungen von:
● R. G. Weigel und O. H. Knoll. × H. Siedentopf, Beobachter M.
○ H. Siedentopf, Beobachter W. △ B. Schönwald und W. Arndt.
▲ B. Schönwald, W. Arndt und R. O. Schumacher.

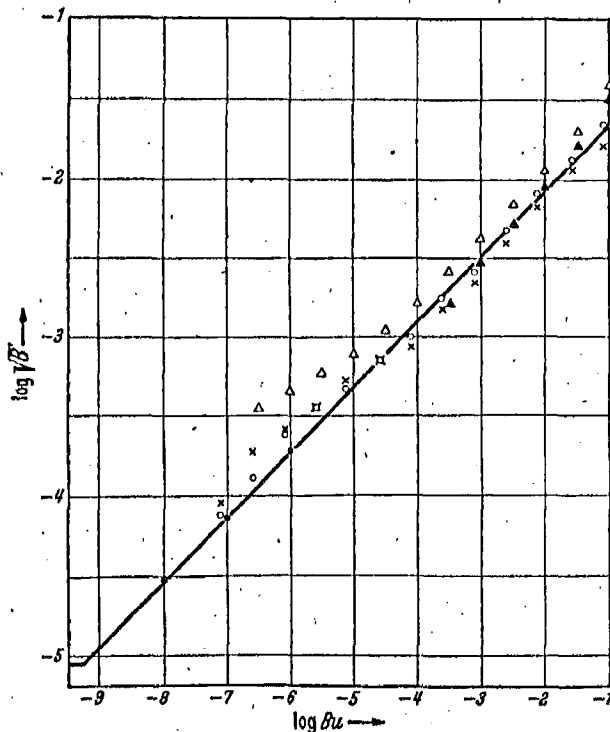


Abb. 2. Die Leuchtdichtefunktion B , berechnet aus Messungen von:
●, ×, ○ wie in Abb. 1. △ W. Arndt und B. Schönwald.
▲ R. O. Schumacher und B. Schönwald.

darf aber nicht geschlossen werden, daß dieses Beobachtungsmaterial wirklich genauer ist. In den Abb. 1 und 2 sind die Logarithmen der ermittelten Funktionswerte $\sqrt{\Phi}$ und \sqrt{B} über dem Logarithmus der Umfeldleuchtdichte, graphisch dargestellt. Man sieht, daß die Einordnung für die aus den Beobachtungen von H. Siedentopf entstammenden Werte, namentlich auffallend für den Beobachter M., nicht immer den berechneten Fehlergrößen entspricht. Auf den wahrscheinlichen Grund hierfür habe ich schon oben hingewiesen. Nach den geschilderten Befunden kann aber nicht daran gezweifelt werden, daß die Beziehung 4a) die Genauigkeit der Messungen wirklich ausschöpft und somit 4a) auf Grund der vorliegenden Beobachtungen als allgemeines Wahrnehmungsgesetz angesprochen werden muß.

Aus den Abb. 1 und 2 ist ferner ersichtlich, daß trotz der starken Heterogenität des Beobachtungsmaterials deutlich eine Gesetzmäßigkeit in der Anordnung der berechneten Funktionswerte herauspringt. Besonders einfach ist der Zusammenhang der Funktion \sqrt{B} mit der Umfeldleuchtdichte: $\log \sqrt{B}$ ist eine lineare Funktion von $\log B_u$; es gilt also für die Leuchtdichtefunktion B :

$$\sqrt{B} = Q B_u^a. \quad (6)$$

Komplizierter scheint zunächst die Abhängigkeit der Lichtstromfunktion Φ von der Umfeldleuchtdichte zu sein (Abb. 1); aber die Wendetangente der darstellenden

Kurve im Gebiete des Übergangs vom Nachtsehen zum Tagsehen legt die Vermutung nahe, daß es sich hier um das Zusammenwirken zweier Gesetzmäßigkeiten handeln dürfte, von denen die eine auf die Auswirkung der Stäbchen, die andere auf den Einfluß der Zapfen

zurückzuführen ist. Einschlägige Überlegungen haben dazu geführt, die Funktion Φ durch den Ansatz

$$\sqrt{\Phi} = \log C B_u^c + P B_u^p = (\sqrt{\Phi})_s + (\sqrt{\Phi})_z \quad (7)$$

darzustellen, wobei der erste Term dem Einfluß der Stäbchen, der zweite der Wirkung der Zapfen zugeordnet werden soll. Die Koeffizienten und Exponenten in 7) wurden auch hier mit Hilfe der in Tab. 1 dargestellten Funktionswerte von $\sqrt{\Phi}$ nach dem Gaußschen Verfahren berechnet, was in diesem Falle schon ziemlich kompliziert ist, da es sich um die gleichzeitige Ermittlung von vier Unbekannten handelt. Die ausgezogene Kurve in Abb. 1 entspricht dieser Berechnung.

Nach dem Ansatz 7) sind bei jeder Leuchtdichte prinzipiell stets beide Netzhautelemente gleichzeitig in Tätigkeit. Um zu prüfen, inwieweit dies zahlenmäßig mit den bekannten physiologischen Verhältnissen im Einklang steht, sondern wird in 7) die Wirkung beider Netzhautelemente. Für den Einfluß der Stäbchen erhält man

$$\sqrt{\Phi} - (\sqrt{\Phi})_z = \log U + c \log B_u. \quad (7a)$$

Die Größe $\sqrt{\Phi} - (\sqrt{\Phi})_z$, über $\log B_u$ aufgetragen, stellt demzufolge eine Gerade dar. Andererseits erhält man ebenfalls aus 7) für den Einfluß der Zapfen:

$$\sqrt{\Phi} - (\sqrt{\Phi})_s = P B_u^p$$

oder

$$\log\{\sqrt{\Phi} - (\sqrt{\Phi})_s\} = \log P + p \log B_u. \quad (7b)$$

Es stellt also auch die Größe $\log\{\sqrt{\Phi} - (\sqrt{\Phi})_s\}$, über $\log B_u$ aufgetragen, eine Gerade dar. Aus den Abb. 3 und 4, in denen diese Darstellungen durchgeführt sind, ersieht man, daß, abgesehen von den teilweise stark herausfallenden Funktionswerten, die sich aus den Messungen des Beobachters M. ergeben haben, der gesetzmäßige Einfluß der Stäbchen auf die Lichtstromfunktion sich etwa bis 10^{-3} Stilb aufwärts

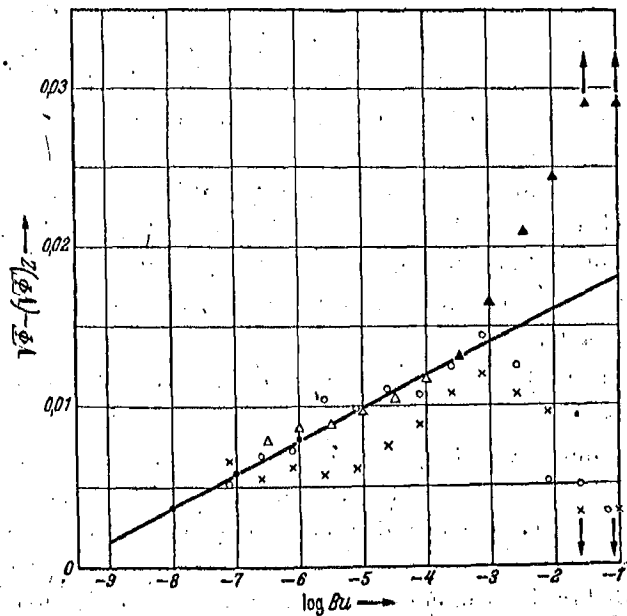


Abb. 3. Bereich des gesetzmäßigen Einflusses der Stäbchen auf die Lichtstromfunktion. •, ×, ○, △, ▲ wie in Abb. 1.

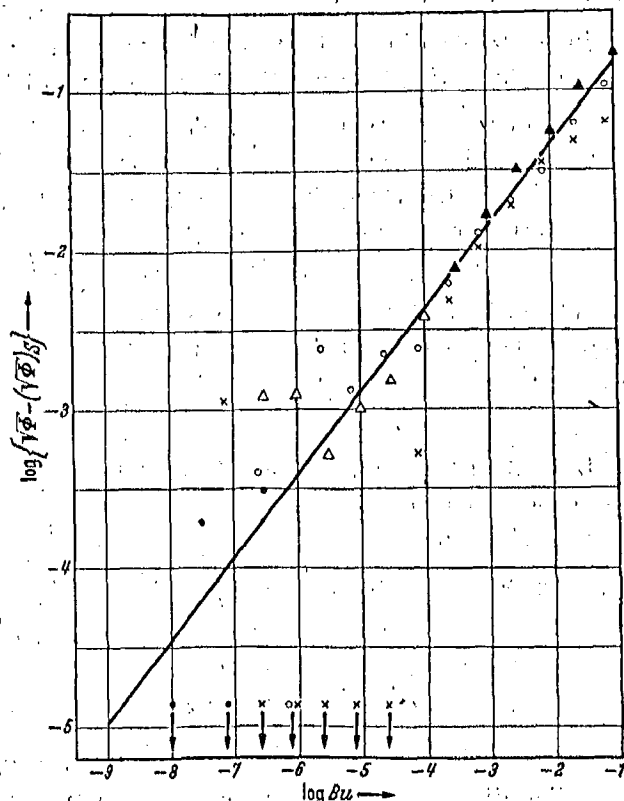


Abb. 4. Bereich des gesetzmäßigen Einflusses der Zapfen auf die Lichtstromfunktion. •, ×, ○, △, ▲ wie in Abb. 1.

bemerkbar macht, dann aber eine starke Streuung der Funktionswerte eintritt. Umgekehrt ist der gesetzmäßige Einfluß der Zapfen auf die Lichtstromfunktion wohl sicher bis etwa $10^{-5,5}$ Stilb abwärts, teilweise noch darüber hinaus feststellbar. Der Ansatz 7) gibt also die physiologisch bekannten Tatsachen gut wieder. Daß trotz der großen Streuung in den Grenzbereichen die Funktion Φ mit dem Ansatz 7), wie aus Abb. 1 ersichtlich ist, sich dem Beobachtungsmaterial über alle Umfeldleuchtdichten hin gut anpaßt, liegt daran, daß in den Grenzbereichen jeweils derjenige Term in 7), der dort stark streut, gleichzeitig damit auch klein gegen den anderen Term wird.

In den Abb. 1 und 2 sind die darstellenden Kurven bei einem gewissen Wert im Bereiche niedrigster Umfeldleuchtdichten horizontal abgesetzt, und zwar aus folgendem Grund: Der Begriff „lichtlos“ bedeutet, physiologisch genommen, nicht $B_u = 0$, sondern nur, daß B_u unterhalb der Schwelle liegt. Diesen Schwellenwert kann man nun mit Hilfe derjenigen Funktionswerte $\sqrt{\Phi}$ und \sqrt{B} , die ich aus den Messungen von R. G. Weigel und O. H. Knoll für „lichtloses“ Umfeld herechnet habe (Tab. 1), durch Einordnung in die darstellenden Kurven bestimmen. Man erhält so aus der Darstellung von $\log\sqrt{\Phi}$ in Abb. 1 als oberste Grenze des „lichtlosen“ Umfeldes $10^{-8,9}$ Stilb und aus der Darstellung von $\log\sqrt{B}$ in Abb. 2 den Wert $10^{-9,3}$ Stilb. Von dem geringen Unterschiede beider Ergebnisse kann man wohl absehen, da einerseits die Möglichkeit besteht, daß der Übergang der Kurven in eine Parallele zur Abszissenachse jeweils nicht un stetig, sondern allmählich erfolgt. Andererseits kann sehr wohl der Schwellenwert der Leuchtdichte des Umfeldes von der Größe des Schwinkels des Infeldes abhängen, und es folgt aus 4a), daß bei sehr kleinen Schwinkeln für die Wahrnehmungsgröße B_u bei konstantem B_i im wesentlichen der Funktionsverlauf von Φ und bei sehr großen Schwinkeln im wesentlichen der Funktionsverlauf von B maßgebend ist. Im Mittel wird man also nach unserem Befund für „lichtloses“ Umfeld $10^{-9,1}$ Stilb ansetzen können, was gut den aus anderen Untersuchungen bekannten Verhältnissen entspricht.

Zusammenstellung der Ergebnisse. Für Lichtreize, die dem unbewaffneten Auge unter dem Winkel σ dargeboten werden, wobei die Helligkeit des Reizes größer ist als die des Umfeldes ($B_i > B_u$), gilt im Bereich aller Umfeldleuchtdichten für den relativen Lichtstrom das Gesetz

$$(B_i - B_u) \sigma^2 = (\sqrt{\Phi} + \sigma\sqrt{B})^2, \quad 8)$$

wobei die „Lichtstromfunktion“ Φ in Abhängigkeit von der Umfeldleuchtdichte im ganzen Bereich der Umfeldleuchtdichten (vielleicht mit Ausnahme des Gebietes der einsetzenden Blendung) bestimmt wird durch

$$\sqrt{\Phi} = \log C B_u^c + P B_u^p, \quad 8a)$$

und die „Leuchtdichtefunktion“ B ebenfalls im ganzen Bereich der Umfeldleuchtdichten das Gesetz befolgt

$$\sqrt{B} = Q B_u^q. \quad 8b)$$

Die Werte der Koeffizienten und Exponenten sind für B in Stilb und σ in Minuten:

$$\left. \begin{array}{ll} C = 1,0479 \pm 0,0002; & c = 0,00208 \pm 0,00001 \\ P = 0,50 \pm 0,07; & p = 0,52 \pm 0,03 \\ Q = 0,058 \pm 0,002; & q = 0,412 \pm 0,006 \end{array} \right\} \quad 8c)$$

Für „lichtloses“ Umfeld ist im Mittel $B_u = 10^{-9,1}$ Stilb zu setzen.

Für die praktische Benutzung sind, mit Hilfe obiger Konstanten berechnet, in Tab. 2 nach B_u abgestuft, die Werte der Funktionen $\sqrt{\Phi}$ und \sqrt{B} wiedergegeben.

Tabelle 2* Mittlere Werte der Lichtstromfunktion Φ und der Leuchtdichtefunktion B .

$\log B_u$	$\sqrt{\Phi}$	\sqrt{B}	$\sqrt{\frac{\Phi}{B_u}}$	$\sqrt{\frac{B}{B_u}}$	$\frac{B}{B_u}$
Dimension:	stilb ^{1/2} Min ¹	stilb ^{1/2}	Min ¹	o	o
-9	0,0016	0,000011	50,2	0,356	0,126
-8,5	0,0026	0,000018	47,0	0,322	0,104
-8	0,0037	0,000029	36,9	0,291	0,085
-7,5	0,0048	0,000047	26,8	0,263	0,069
-7	0,0059	0,000075	18,5	0,238	0,057
-6,5	0,0070	0,000121	12,4	0,215	0,046
-6	0,0082	0,00019	8,20	0,194	0,038
-5,5	0,0096	0,00031	5,37	0,175	0,031
-5	0,0112	0,00050	3,53	0,159	0,025
-4,5	0,0132	0,00081	2,36	0,143	0,020
-4	0,0162	0,00129	1,61	0,129	0,017
-3,5	0,0206	0,00208	1,16	0,117	0,014
-3	0,0279	0,00334	0,88	0,106	0,011
-2,5	0,0402	0,00537	0,71	0,096	0,009
-2	0,062	0,0086	0,62	0,086	0,007
-1,5	0,100	0,0139	0,57	0,078	0,006
-1	0,17	0,022	0,54	0,070	0,005

Sieht man von den beiden extremen Grenzbereichen der Umfeldleuchtdichte ab, so läßt sich $\sqrt{\Phi}$ mit sehr guter Annäherung noch durch eine einfachere Beziehung als 8a) darstellen. Da, wie aus Abb. 1 ersichtlich ist, die Wendetangente über einen größeren Bereich der Umfeldleuchtdichten hin sich der darstellenden Kurve $\log\sqrt{\Phi}$ gut anschmiegt, kann unter Ausschluß der extremen Grenzen näherungsweise statt 8a) einfacher

$$\sqrt{\Phi} = RB_u^r \tag{8d)}$$

geschrieben werden. Diese Formel hat aber nunmehr, im Gegensatz zu 8a), keine physiologische, sondern nur noch eine technische Bedeutung. Mit Hilfe der in Tab. 2 dargestellten mittleren Werte von $\sqrt{\Phi}$ ergeben sich für die Konstanten in 8d) je nach dem Umfang des abgegrenzten Bereiches folgende Werte:

zwischen	R	r	$m \log \sqrt{\Phi}$
$10^{-7,5}$ und 10^{-4} Stilb:	$0,062 \pm 0,002$	$0,147 \pm 0,002$	$\pm 0,008$
10^{-8} $10^{-3,5}$ Stilb:	$0,070 \pm 0,004$	$0,156 \pm 0,003$	$\pm 0,017$
$10^{-8,5}$ 10^{-3} Stilb:	$0,082 \pm 0,006$	$0,169 \pm 0,005$	$\pm 0,032$
10^{-9} $10^{-2,5}$ Stilb:	$0,102 \pm 0,012$	$0,186 \pm 0,008$	$\pm 0,059$

Die Fehlergrößen der Konstanten sind hier nicht absolut zu werten, sondern auf die vollständige Darstellung entsprechend der Formel 8a) bezogen. Die Annäherung ist für die ersten drei Bereiche, wie ersichtlich, recht gut, so daß gegen ihre allgemeinere Anwendung keine Bedenken bestehen. Auch die letzte Näherung ist für Überschlagsrechnungen noch gut brauchbar. Die letzte Spalte gibt die mittlere Streuung von $\log\sqrt{\Phi}$ bei Anwendung dieser Näherungen gegenüber den genauen Werten in Tab. 2.

Diskussion des Wahrnehmungsgesetzes. Für sehr kleine Schwinke σ kann man in 8) die Größe $\sigma\sqrt{B}$ neben $\sqrt{\Phi}$ vernachlässigen und erhält dann das Riccosche Gesetz für den relativen Lichtstrom:

$$(B_i - B_u) \sigma_{(\sigma \leq \bar{\sigma})}^2 = \Phi. \tag{9)}$$

Der Grenzwinkel $\bar{\sigma}$, bis zu welchem diese Beziehung anwendbar ist, hängt natürlich von den Genauigkeitsansprüchen ab. Sehen wir allgemein als Grenze denjenigen Wert von σ an, für welchen $\sigma\sqrt{B}$ gerade gleich dem Bruchteil ε des Wertes von $\sqrt{\Phi}$ wird, so ergibt sich aus 8) für den Grenzwinkel des Riccoschen Gesetzes die Beziehung

$$\bar{\sigma} = \varepsilon \sqrt{\frac{\Phi}{B}} \tag{9a}$$

Mit Hilfe der Funktionswerte aus Tab. 2 sind die zu $\varepsilon = 0,1$ entsprechenden Grenzwinkel $\bar{\sigma}$ in Tab. 3 zusammengestellt. Aus dieser ist ersichtlich, daß die Anwendbarkeit des Riccoschen Satzes mit abnehmender Umfeldleuchtdichte wächst.

Tabelle 3. Grenzwinkel $\bar{\sigma}$ des Riccoschen Gesetzes (für $\varepsilon = 0,1$).

$\log B_u$	$\bar{\sigma}$	$\log B_u$	$\bar{\sigma}$	$\log B_u$	$\bar{\sigma}$	$\log B_u$	$\bar{\sigma}$
-9	14,5'	-7	7,9'	-5	2,2'	-3	0,8'
-8,5	14,4	-6,5	5,8	-4,5	1,6	-2,5	0,7
-8	12,8	-6	4,3	-4	1,2	-2	0,7
-7,5	10,2	-5,5	3,1	-3,5	1,0	-1,5	0,7

In der klassischen Form wird bekanntlich der Riccosche Satz nicht auf den relativen Lichtstrom, sondern auf den Infeldlichtstrom bezogen, angewandt, also

$$B_i \sigma^2 = \Phi \tag{9b}$$

geschrieben. Dies erfordert noch eine weitere zusätzliche Bedingung zu 9a): Es muß, wie aus 9) ersichtlich, noch die Bedingung

$$B_u \sigma^2 \ll \Phi$$

hinzutreten. Der Grenzwinkel $\bar{\sigma}$ genügt dieser zusätzlichen Bedingung, wie mit Hilfe der Tab. 2 und 3 leicht zu errechnen ist, nur im Bereiche kleinster Umfeldleuchtdichten; es ergibt sich nämlich:

bei $\log B_u$:	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3
für $B_u \bar{\sigma}^2$:	$210 \cdot 10^{-9}$	$160 \cdot 10^{-8}$	$62 \cdot 10^{-7}$	$18 \cdot 10^{-6}$	$4,8 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$0,6 \cdot 10^{-3}$
für Φ :	$2560 \cdot 10^{-9}$	$1370 \cdot 10^{-8}$	$350 \cdot 10^{-7}$	$67 \cdot 10^{-6}$	$12,4 \cdot 10^{-5}$	$2,6 \cdot 10^{-4}$	$0,8 \cdot 10^{-3}$

Man erkennt, daß schon bei Umfeldleuchtdichten von 10^{-7} Stilb aufwärts $B_u \bar{\sigma}^2$ einen beachtlichen Prozentsatz von Φ ausmacht.

Für große Schwinkel σ geht andererseits die Beziehung 8) in das Weber-Fechner-sche Gesetz über:

$$B_i - B_u (\sigma \approx \bar{\sigma}) = B. \tag{10}$$

Auch hier können wir den zugehörigen Grenzwinkel $\bar{\sigma}$ unter der Annahme bestimmen, daß $\sqrt{\Phi} \leq \varepsilon \sigma \sqrt{B}$ bleiben soll. Es ergibt sich dann als Bedingung für den Grenzwinkel des Weber-Fechnerschen Gesetz, durch den des Riccoschen Satzes ausgedrückt, einfach

$$\bar{\sigma} = \frac{\bar{\sigma}}{\varepsilon^2}. \tag{10a}$$

Das Weber-Fechnersche Gesetz ist also, wie aus Tab. 3 ersichtlich, von um so kleineren Schwinkeln an anwendbar, je größer die Umfeldleuchtdichte ist.

Aus Formel 8) ist ferner zu ersehen, daß die sogenannten Pipersche Regel, dergemäß die Beziehung $(B_i - B_u) \sigma = \text{const}$ bestehen soll, gar keine Berechtigung hat; denn nach 8) bleibt die Größe

$$(B_i - B_u) \sigma = \frac{(\sqrt{\Phi} + \sigma \sqrt{B})^2}{\sigma}$$

immer von σ abhängig. Man kann höchstens nach demjenigen Schwinkel fragen, für den $(B_i - B_u)\sigma$ einen Extremwert annimmt, in dessen unmittelbarer Nachbarschaft dann $(B_i - B_u)\sigma$ die geringsten Änderungen aufweist. Die Bedingung dafür ist:

$$2\sigma\sqrt{B}(\sqrt{\Phi} + \sigma\sqrt{B}) - (\sqrt{\Phi} + \sigma\sqrt{B})^2 = 0,$$

welche nur eine Lösung, nämlich $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{\Phi}{B}}$ hat. Für diesen Piperschen „Punkt“, dessen $\bar{\sigma}$ gerade dem Zehnfachen der Werte $\bar{\sigma}$ in Tab. 3 entspricht, hat $(B_i - B_u)\sigma$ den Extremwert $4\sqrt{\Phi B}$ und bildet dort ein flaches Minimum.

Um schließlich zum Schschärfengesetz und zur sogenannten Ricco-Piperschen Formel zu gelangen, lösen wir 8) nach σ auf. Das ergibt nach einfacher Rechnung:

$$\sigma = \frac{\sqrt{\Phi} \{ \sqrt{B} \pm \sqrt{B_i - B_u} \}}{B_i - B_u - B} \quad (11)$$

Man kann leicht überlegen, daß hier nur die Wurzel mit positivem Vorzeichen in Frage kommt. Definiert man, wie üblich, die Seshchäfe S durch den reziproken Schwinkel, beachtet ferner, daß bei solchen Untersuchungen Teste mit konstantem Kontrast K benutzt zu werden pflegen, und definiert diesen Kontrast durch

$$\frac{B_i - B_u}{B_u} = K, \quad (12)$$

so lautet nach 11) und 12) das allgemeine Seshchärfengesetz

$$S = \frac{1}{\sigma} = \frac{K - \frac{B}{B_u}}{\sqrt{\frac{\Phi}{B_u}} \left\{ \sqrt{K} + \sqrt{\frac{B}{B_u}} \right\}} \quad (13)$$

Die Werte der Größen $\sqrt{\frac{\Phi}{B_u}}$ und $\sqrt{\frac{B}{B_u}}$ sind ebenfalls in Tab. 2 vermerkt. Hiermit sind die in Abb. 5 dargestellten Seshchärfenkurven für die Kontraste 1, 10 und 100 berechnet. Wir erkennen die typischen Kurven wieder, wie sie sich aus Beobachtungen an Kreisscheibentesten im Falle $B_i > B_u$ bei verschiedenen Kontrasten ergeben. Aus 13) kann man leicht allgemein übersehen, welche Kontraste gar nicht wahrgenommen werden können: Der Grenzkontrast, bei dem die Seshchärfe auf den Wert Null herabsinkt, ist gegeben durch

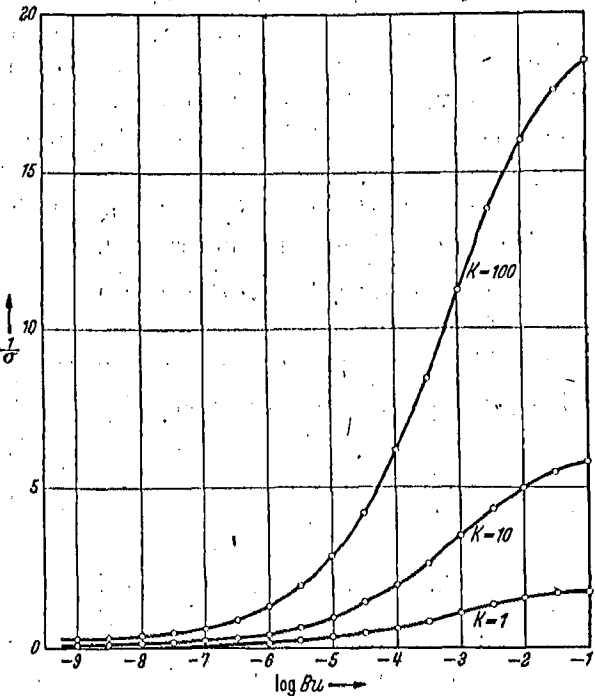


Abb. 5. Seshchärfe ($B_i > B_u$) für verschiedene Kontraste K , \times berechnet nach Formel 13) aus Tab. 2.

$$\bar{K} = \frac{B}{B_u} \quad (14)$$

und kann ebenfalls unmittelbar aus der letzten Spalte der Tab. 2. abgelesen werden.

Für hohe Kontraste kann man, wie aus der Tab. 2 leicht ersichtlich ist, in 13) im Zähler $\frac{B}{B_u}$ neben K und im Nenner $\sqrt{\frac{B}{B_u}}$ neben \sqrt{K} vernachlässigen. Dann nimmt das Sehschärfengesetz die überaus einfache Form an:

$$S = \frac{1}{\sigma} = \sqrt{\frac{KB_u}{\Phi}}. \quad 13a)$$

Hierin läßt sich, wenn man von der Anwendung auf die äußersten Grenzbereiche der Umfeldleuchtdichten absieht, noch der Nenner mit Hilfe von 8d) explizit darstellen. Man erhält

$$S = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{R} \sqrt{KB_u^{1-r}}. \quad 13b)$$

Stellen wir diese Beziehung um und schreiben

$$\sigma \sqrt{KB_u^{1-r}} = R, \quad 13c)$$

so erkennen wir darin sofort die sogenannte Ricco-Pipersche Formel wieder, und zwar in einer beachtenswerten Verallgemeinerung. Denn in der bisher bekannten Form pflegt man die Ricco-Pipersche Beziehung zu schreiben

$$\sigma B_u^r = k,$$

wo σ und k empirisch zu ermittelnde Größen sind und k für jeden Kontrast gesondert bestimmt werden muß. Durch Vergleich mit 13c) ergibt sich nun, daß k einfach der Quadratwurzel aus dem Kontrast K umgekehrt proportional ist. Da erfahrungsgemäß die Ricco-Pipersche Formel bei hohen Kontrasten sich für die Behandlung sehr vieler Probleme der angewandten Optik ausreichend und gut anwendbar erweist, gilt dies natürlich ebenso für unsere expliziten Beziehungen 13b) bzw. 13c), in denen darüber hinaus nunmehr die Konstanten durch 8e) bekannt sind, und außerdem ebendort die Bereiche der Anwendbarkeit genau definiert sind.

Zuerst wohl von A. Kühl¹, später auch von H. Schober² und B. Schönwald³ ist eine einfache Beziehung zwischen dem Riccoschen Grenzwinkel und der Sehschärfe vermutet und gesucht worden. Eine solche erhält man für größere Kontraste durch Elimination von $\sqrt{\Phi}$ aus 13a) und 9a), nämlich

$$S = \frac{\varepsilon \sqrt{K}}{\sigma \sqrt{\frac{B}{B_u}}}.$$

Aus Tab. 2 ist ersichtlich, daß sich $\sqrt{\frac{B}{B_u}}$ erst über größere Bereiche von B_u stärker ändert. Innerhalb kleinerer Bereiche von B_u ist somit S zu σ sehr angenähert umgekehrt proportional. Eine strenge und für beliebige Kontraste gültige Beziehung läßt sich leicht aus 9a) und 13) ablesen; sie hat aber wohl keine größere Bedeutung.

Folgerungen. Unsere Untersuchung hat wohl erwiesen, daß die zur Zeit vorliegenden Messungen der Wahrnehmung von Lichtreizen im Falle $B_i > B_u$ durchaus genügen, um das allgemeine Gesetz der Wahrnehmung zu erkennen und numerisch ausreichend darzustellen. Es wäre daher rationell, in Zukunft die experimentellen Unter-

¹ A. Kühl, *Zeitschr. f. ophthalm. Optik.* 14. S. 129. 1926; *diese Zeitschr.* 58. S. 491. 1938.

² H. Schober, *Zeitschr. f. techn. Phys.* 19. S. 343. 1938. — H. Schober und K. Wittmann, *Das Licht* 8. S. 199. 1938.

³ B. Schönwald, *Das Licht* 11. S. 15. 1941; siehe Abb. 3.

suchungen ausschließlich auf den für die angewandte Optik mindestens ebenso wichtigen Fall $B_i < B_u$ zu konzentrieren, damit auch hier die einschlägigen Verhältnisse schließlich eine prinzipielle und zusammenfassende Klärung finden können. Für diesen Fall liegen zwar Sehschärfenmessungen vor¹, die nach unseren Entwicklungen [Formel 13)] prinzipiell für die einschlägigen Untersuchungen ausreichen würden; die Ergebnisse für die hier nur in Frage kommenden Messungen am Kreisscheibentest sind aber von den Autoren nur in graphischer Form mitgeteilt, und es ist nicht möglich, aus dieser Darstellung die für die Berechnungen gerade besonders wichtigen Daten für kleine Kontraste bei geringen Umfeldhelligkeiten mit einiger Sicherheit zu entnehmen.

(Eingegangen am 20. III. 1943.)

Darstellung der astigmatischen Abweichungen und ihrer Flächenanteile durch Queraberrationsausdrücke und Zerlegung der Abweichung von der Isoplanasiebedingung in Flächenanteile.

Mit 2 Textabbildungen.

Von

Dr. Alfred Thomescheit in Berlin (Askania-Werke A.-G.)

A. Einleitung.

In einer früheren Arbeit des Verf.² wurden bei den senkrechten Abständen meridionaler und sagittaler Bildpunkte von der Gaußschen Bildebene die Gesamtaberration und ihre Flächenanteile als Längsabweichungen dargestellt. Es ist jedoch auch eine Behandlung dieser Aberrationen in der Form von relativen Querabweichungen möglich, was anschauliche Vorzüge mit sich bringt. Eine entsprechende Betrachtung wird im folgenden durchgeführt.

Ferner wurde in der genannten Arbeit der Versuch unternommen, bei der Abweichung von der Isoplanasiebedingung und ihren vereinfachten Formen sowie bei der chromatischen Variation der Bildgröße den Gesamtbetrag $\Delta z'_x$ bzw. $\Delta c'_x$ der Abweichung in die Anteile der einzelnen Flächen des optischen Systems zu zerlegen. Dabei wurde im Gegensatz zu den übrigen Summanden der Ausdrücke $(\Delta z'_v)_x$ bzw. $(\Delta c'_v)_x$ der Summand $(\Delta s'_v)_x$ dadurch gewonnen, daß die Größe $\Delta s'_v$ als im Bildraum des aus 1ter bis v ter Fläche bestehenden Teilsystems auf der optischen Achse am Orte der wirklichen Längsaberration $\Delta s'_v$ lokalisierte Strecke aufgefaßt und durch das aus $(v+1)$ ter bis κ ter Fläche bestehende Restsystem nach den Gesetzen der paraxialen Abbildung in den Bildraum des Gesamtsystems abgebildet wurde. Dieses Verfahren ist indessen unzulässig; es muß vielmehr das Glied $\Delta s'_v$ der gleichen formalen Behandlung unterzogen werden, d. h. mit dem gleichen Faktor $p_{v+1, \kappa}$ multipliziert werden wie die übrigen Summanden. Die entsprechend berichtigten Formeln werden im folgenden angegeben.

B. Der Zusammenhang der senkrechten Abstände meridionaler und sagittaler Bildpunkte von der Gaußschen Bildebene mit entsprechenden relativen Querabweichungen.

Bei der Berechnung der Lage meridionaler und sagittaler Bildpunkte betrachtet man Bündel unendlich kleiner Öffnung. Diese Bündel erzeugen in der Gaußschen Bildebene nur unendlich kleine Zerstreungslinien, die als Maß der Bildfehlerwirkung ungeeignet sind. Wir betrachten daher, um ein geeignetes Maß zu erhalten, an Stelle dieser Zerstreu-

¹ H. Siedetopf, E. J. Meyer und J. Wempe, *diese Zeitschr.* 61. S. 372. 1941.

² *Diese Zeitschr.* 62. S. 105—119. 1942.