Zwischenrechnung zur Arbeit von Walter E. Schön über den Zylindereffekt

Holger Merlitz
(Dated: December 19, 2023)

Wir nehmen an, dass ein Objekt mit Winkel A zur Hauptachse des Instruments in einen Winkel a zur Bildfeldmitte abgebildet wird. Die Abbildung ist zentralsymmetrisch um die Bildfeldmitte. Die Verzeichnung lässt sich wie folgt parametrisieren:

$$\tan ka = m \tan kA \tag{1}$$

mit dem Verzeichnungsparameter $k \in [0, 1]$ und der Vergrößerung m. Der Fall $k = 1$ entspricht einem Fernglas ohne Verzeichnung (orthoskopische Abbildung), der Grenzfall $k \to 0$ entspricht der Winkelbedingung. Um zu modellieren, was das Auge tatsächlich wahrnimmt, führen wir eine weitere Transformation in den visuellen Raum ein:

$$y = \frac{1}{l} \tan(l \cdot a) \ , \tag{2}$$

wo y jetzt der sich dem Auge bietende verallgemeinerte Abstand zur Sehfeldmitte darstellt, und $l \in [0, 1]$ der visuelle Verzeichnungsparameter ist. Auch hier nehmen wir an, dass sämtliche Verzeichnungen zentralsymmetrisch sind, was in Einklang mit experimentellen Arbeiten ist [1]. Im Spezialfall $l = 1$ wäre y ein euklidischer Abstand in einem flachen Raum, im Fall $l = 0$ ein reiner Winkel in einem sphärischen Raum, und generell handelt es sich bei y um den 'Maßbandabstand' zur Sehfeldmitte, gemessen auf einer gekrümmten Oberfläche. Als Funktion zum Objektwinkel erhalten wir dann die allgemeine Beziehung

$$y = \frac{1}{l} \tan \left\{ \frac{l}{k} \arctan \left[m \cdot \tan\left(k \cdot A \right) \right] \right\} \ , \tag{3}$$

die sowohl die instrumentelle Verzeichnung k als auch die visuelle Verzeichnung l und die Vergrößerung m enthält.

Für das schwenkende Fernglas definieren wir das charakteristische Driftverhältnis

$$\Gamma \equiv \frac{\dot{y}(A)}{\dot{y}(0)} \ , \tag{4}$$

also die wahrgenommene Geschwindigkeit eines Bildpunktes, der zum Objekt mit dem Objektwinkel A gehört, geteilt durch die entsprechende Geschwindigkeit in der Bildfeldmitte. Hier nehmen wir eine Trajektorie an, die vom Bildfeldrand durch die Mitte auf den gegenüberliegenden Rand führt. Mit dem bekannten Wert für $y(A)$, Gleichung (3), erhalten wir durch Ableitung den allgemeinen Ausdruck [3]

$$\Gamma = \frac{\cos^{-2}(kA)}{\cos^2\left(\frac{l}{k} \arctan(m \tan(kA))\right) \cdot (1 + m^2 \tan^2(kA))} \ . \tag{5}$$

Dieser Ausdruck is die allgemeinste Lösung des Problems für jeden beliebigen instrumentellen Verzeichnungsparameter k und jede beliebige visuelle Verzeichnung l.

Um den Vergleich mit Walter E. Schöns Berechnungen [2] zu erhalten, wählen wir zunächst ein verzeichnungsfreies (orthoskopisches, $k = 1$) Fernglas, woraus folgt

$$\Gamma = \frac{\cos^{-2}(A)}{\cos^2\left(l \arctan(m \tan(A))\right) \cdot (1 + m^2 \tan^2(A))} \ . \tag{6}$$

Ferner nimmt Schön an, dass das Auge nicht Strecken, sondern Winkel registriert (S. 6, rechte Spalte in seinem Skript). Dies entspricht der Wahl $l = 0$, einem sphärischen visuellen Raum, und hier vereinfacht sich das Driftverhältnis zu

$$\begin{aligned} \Gamma = \frac{\omega'_A}{\omega'_0} &= \frac{1}{\cos^2(A) \cdot (1 + m^2 \tan^2(A))} \\ &= \frac{1 + \tan^2 A}{1 + m^2 \tan^2 A} \ , \end{aligned} \tag{7}$$

wobei wir noch $\cos^2 A = 1/(1+\tan^2 A)$ verwendet haben. Dies ist jetzt in der Tat **das von Schön definierte Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten**, ω'_A/ω'_0, denn mit der Wahl $l = 0$ des Verzeichnungsparameters sind alle wahrgenommenen Distanzen Winkel, und deren zeitliche Änderungen Winkelgeschwindigkeiten. Schön schreibt dieses Verhältnis nicht als Funktion des Objektwinkels A, sondern als Funktion des Bildwinkels a, also verwenden wir die Tangensbedingung

$$A = \arctan\left[\frac{\tan a}{m}\right] \tag{8}$$

und ersetzen

$$\frac{\omega'_a}{\omega'_0} = \frac{1 + \frac{\tan^2 a}{m^2}}{1 + \tan^2 a} \ . \tag{9}$$

Schön ersetzt jetzt nochmals $\cos^2 a = 1/(1 + \tan^2 a)$ und formt den Ausdruck ein wenig um:

$$\frac{\omega'_a}{\omega'_0} = \cos^2 a + \frac{1 - \cos^2 a}{m^2} = \cos^2 a + \frac{\sin^2 a}{m^2} \ , \tag{10}$$

wo er zuletzt $1 - \cos^2 a = \sin^2 a$ verwendet hat. **Diese letzte Gleichung ist identisch mit Schöns Endergebnis auf S. 7, ganz unten rechts.** Was haben wir aus dieser Zwischenrechnung gelernt?

- Schöns Berechnung auf S. 7 seines Skriptes ist korrekt und entspricht einem Spezialfall der von mir publizierten Gleichung (5)

- Schöns Annahme, dass das Auge Winkel registriert (S. 6), entspricht in meinem Modell der Annahme eines sphärischen visuellen Raumes mit dem Verzeichnungsparameter $l = 0$

Der Fall $l = 0$ bedeutet ferner, dass ein Fernglas, das nach der Winkelbedingung korrigiert ist ($k = 0$), dem Auge ein Schwenken ohne Globuseffekt ermöglicht. Dazu setzen wir in Gleichung (5) zunächst $k = 0$ und erhalten für ein Fernglas mit Winkelbedingung

$$\Gamma = \frac{1}{\cos^2(l \cdot m \cdot A)} \,, \tag{11}$$

und sobald hier die visuelle Verzeichnung $l = 0$ gesetzt wird, erhalten wir

$$\Gamma = 1 \tag{12}$$

im gesamten Sehfeld und unabhängig von der Vergrößerung. Dies ist keine Überraschung, da ja die Winkelbedingung alle Winkel wieder in Winkel abbildet und der sphärische visuelle Raum diese Winkel wiederum ohne weitere Verzerrungen abbilden kann. Ein Fernglas, das orthoskopisch ist, würde unter dieser Annahme jedoch dem Auge eine sehr starke tonnenförmige Verzeichnung bieten. Dies läßt sich am einfachsten erkennen, indem man die Trajektorien aller (und nicht nur der äquatorialen) Bildpunkte auf dem Computer simuliert.

[1] A.H.J. Oomes, J.J. Koenderink, A.J. Doorn, H. de Ridder, *What are the uncurved lines in our visual field? A fresh look at Helmholtz's checkerboard*, Perception **38**, pp. 1284-1294 (2009).

[2] https://www.weschoen.de/globuseffekt.html und das dort verlinkte Skript (Dezember 2023).

[3] H. Merlitz, *Distortion of binoculars revisited: Does the sweet spot exist?*, J. Opt. Soc. Am. A, **27**, p. 50 (2010).